Tutorato di Statistica 1 del 20/05/2010
Docente: Prof.ssa Enza Orlandi
Tutore: Dott.ssa Barbara De Cicco

Esercizio 1.
$X_1, ..., X_n \sim Po(\lambda)$; $x = \{0, 1, 2...\}$
La funzione di massima verosimiglianza è:
$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda} = \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!} e^{-n\lambda} = \frac{e^{-n\lambda}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!} e^{\sum_{i=1}^{n} x_i log\lambda}$
La funzione $L(\lambda)$ appartiene alla famiglia esponenziale dove $a(\lambda) = e^{-n\lambda}$,$b(x_i) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}$, $c(\lambda) = log\lambda$ è una funzione monotona crescente in λ e $d(x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i$.
La statistica da usare è $T = \sum_{i=1}^{n} x_i$.
$0,05 = P(\sum_{i=1}^{n} X_i > k|\lambda_0) = \sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{(n\lambda_0)^j}{j!} e^{-n\lambda_0} =$
$1 - \sum_{j=0}^{k} \frac{(n\lambda_0)^j}{j!} e^{-n\lambda_0}$.
Si ricordi che $\sum_{i=1}^{n} x_i \sim Po(n\lambda_0)$
Allora $k = q_{0,95}^{Po(n\lambda_0)}$.
Quindi il test uniformemente più potente di livello $\alpha = 0,05$ è dato dalla regione critica $C = \{(x_1, ..., x_n) : \sum_{i=1}^{n} x_i > k\}$ dove k è il quantile di una $Poisson(n\lambda_0)$ di livello $0,95$

Esercizio 2.
Sia X una singola v.c. da $f(x,\theta) = \theta x^{\theta-1} 1_{(0,1)}(x)$ con $\theta > 0$.

1. $\pi_Y(\theta) = P_\theta(RifiutareH_0) = \int_{1/2}^{1} \theta x^{\theta-1} = 1 - (1/2)^\theta$
   L'ampiezza per definizione è il $sup_\theta \pi_Y(\theta)$ e poichè la potenza è una funzione crescente, si ha: $sup_{\theta \leq 1} \pi_Y(\theta) = 1/2$

2. Il test più potente è quello dato dal lemma di Neqyman-Pearson:
   $\frac{L(\theta_0,x)}{L(\theta_1,x)} = 2x \leq k^*$
   Da cui $C = \{x : x \leq \frac{k^*}{2}\}$ e quindi:
   $\alpha = P(RifiutareH_0|\theta_0) = \int_0^{k*/2} 2xdx = (\frac{k^{*2}}{4})$
   Allora $k^* = 2\sqrt{\alpha}$

3. La densità appartiene alla famiglia esponenziale con $c(\theta) = \theta - 1$ funzione crescente, e $d(x) = logx$.
   Applicando il teorema quindi otteniamo che $C = \{x : logx > k^*\}$ e quindi:
   $\alpha = P(logX > k^*) = P(X > e^{k^*}) = 1 - e^{2k^*}$. Allora $k^* = 1/2log(1 - \alpha)$

Esercizio 3.
Siano $X_1, ..., X_n \sim f(x,\theta) = (\theta + 2)x^{\theta+1}$ con: $0 < x < 1$ e $\theta > 2$.
$f(x,\theta) = (\theta + 2)x^{\theta+1} = (\theta + 2)e^{(\theta+1)logx}$
Quindi la densità appartiene alla famiglia esponenziale con: $a(\theta) = \theta + 2$,$b(x) = 1_{(0,1)}(x)$, $c(\theta) = \theta + 1$ funzione monotona crescente, e $d(x) = logx$. La statistica da usare è $T = \sum_{i=1}^{n} logX_i$.
Calcoliamo la distribuzione di $Y = -logX$

$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(-logX \leq y) = P(X > e^{-y}) = \int_{e^{-y}}^{1} (\theta+2)x^{\theta+1}dx = 1 - e^{-y(\theta+2)}$
$f_Y(y) = (\theta+2)e^{-(\theta+2)y} \sim Exp(\theta+2)$
Allora $\sum_{i=1}^{n} Y_i = -\sum_{i=1}^{n} logX_i \sim \Gamma(n, \theta+2)$
$\alpha = P(\sum_{i=1}^{n} logX_i > k|\theta_0) = P(-\sum_{i=1}^{n} logX_i < k_1|\theta_0) = \int_0^{k_1} \frac{(\theta+2)^n}{\Gamma(n)} x^{n-1}e^{-(\theta_0+2)x}dx$
Il test uniformemente pi'u potente di ampiezza α è dato da:
$C = \{(x_1, ..., x_n) : \sum_{i=1}^{n} logx_i > k\}$ dove $k_1 = -k$ è il quantile di livello α di una $\Gamma(n, \theta_0+2)$

Esercizio 4.

Sia $X_1, ..., X_n$ un campione casuale estratto da $f(x,\theta) = \frac{1}{\theta}x^{\frac{1-\theta}{\theta}}1_{(0,1)}(x)$.

1. La densità appartiene alla famiglia esponenziale dove: $a(\theta) = \frac{1}{\theta}$, $b(x) = 1_{(0,1)}(x)$, $c(\theta) = \frac{1-\theta}{\theta}$ è una funzione descrescente in θ e $d(x) = log(x)$.
   La statistica da usare è $T = \sum_{i-1}^{n} logX_i$.
   $\alpha = P(\sum_{i-1}^{n} logX_i < k^*|\theta_0)$
   Troviamo quindi la distribuzione di T:
   $Y = -logX$; $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(-logX < y) = P(X > e^{-y}) = \int_{e^{-y}}^{1} \frac{1}{\theta}x^{\frac{1-\theta}{\theta}}dx = 1 - e^{-y/\theta}$
   $f_Y(y) = \frac{1}{\theta}e^{-y/\theta} \sim Exp(1/\theta)$ allora $\sum_{i=1}^{n} Y_i = \sum_{i=1}^{n} logX_i \sim \Gamma(n, 1/\theta)$.
   $\alpha = P(\sum_{i=1}^{n} logX_i < k) = P(-\sum_{i-1}^{n} logX_i > -k) = \int_k^{+\infty} \frac{(1/\theta)^n}{\Gamma(n)} y^{n-1}e^{-t/\theta}dy$.

2. Adesso per $n = 2$ e $\theta_0 = 1$ si ottiene:
   $0,05 = P(\sum_{i=1}^{2} logX_i < k) = P(-logX_1 - logX_2 > -k|\theta_0 = 1) = \int_k^{+\infty} \frac{(1/\theta)^2}{\Gamma(2)} ye^{-y}dy = e^{k^*} - k^*e^{k^*}$
   La funzione di potenza è quindi:
   $\pi(\theta) = P(\sum_{i=1}^{2} logX_i < k^*|\theta) = P(-\sum_{i=1}^{2} logX_i > -k^*|\theta) = \int_{-k^*}^{+\infty} (1/\theta)^2 \int_{k_1}^{+\infty} ye^{-y/\theta}dy = \theta e^{-k^*/\theta}(-k^* + \theta)$